LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Gérard Vergnaud [1]

RESUMEN

El objetivo de la teoría de los campos conceptuales es proporcionar un encuadre teórico a las investigaciones sobre las actividades cognitivas complejas especialmente referidas a los aprendizajes científicos y técnicos. Se trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y los invariantes operatorios implícitos en las conductas del sujeto en situación; la teoría explicita también las relaciones entre significados y significantes. Los ejemplos que la ilustran han sido tomados en diversos campos conceptuales: las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, la lógica de clases, el álgebra.

La teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas. Debido a que ofrece un marco para el aprendizaje, es de interés para la didáctica. Su principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos, en los niños y los adolescentes, entendiendo por “conocimientos” tanto los saber-hacer como los saberes expresados. Las ideas de filiación y de ruptura se refieren igualmente a los aprendizajes del adulto, pero estos últimos se efectúan bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos que relativos al desarrollo del aparato psíquico. En el niño y en el adolescente los efectos del aprendizaje y del desarrollo cognitivo intervienen siempre de manera conjunta.

La teoría de los campos conceptuales no es específica de las matemáticas; pero ha sido elaborada primeramente para dar cuenta de procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra.

CONCEPTOS Y ESQUEMAS

Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como lo es, por otra parte, esencial para la historia de las ciencias. Hablar de elaboración pragmática no prejuzga de ninguna manera la naturaleza de los problemas a los cuales un concepto nuevo aporta una respuesta:

[1] CNRS y Université René Descartes.
Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990.

estos problemas pueden ser tanto teóricos como prácticos. Esto no prejuzga tampoco el análisis del papel del lenguaje y del simbolismo en la conceptualización; este papel es muy importante. Simplemente, si se quiere considerar correctamente la medida de la función adaptativa del conocimiento, se debe conceder un lugar central a las formas que toma en la acción del sujeto. El conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento.

Se puede distinguir:

1) clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación;
2) clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abortadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso.

El concepto de “esquema” es interesante para ambas clases de situaciones, pero no funciona de la misma manera en ambos casos. En el primer caso se va a observar para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único; en el segundo caso, se va a observar el esbozo sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y recombinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

Llamamos “esquema” *a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada*. En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria.

Tomemos un primer ejemplo en el dominio de la motricidad: el esquema que organiza el movimiento del cuerpo del atleta en el momento del salto de altura representa un conjunto impresionante de conocimientos espaciales y mecánicos. La conducta del saltador tiene que experimentar ciertas variaciones, el análisis de sus ensayos sucesivos pone en evidencia numerosos elementos comunes. Estos elementos comunes se refieren, a lo largo del tiempo, a la movilización de los músculos que contribuyen a asegurar la eficacia de las diferentes fases del movimiento; pero esta organización motriz reposa sobre una cierta percepción de las relaciones de los objetos en el espacio y especialmente a las relaciones de las diferentes partes del cuerpo con este espacio durante el movimiento. Esta organización perceptivo-motriz supone por tanto categorías de orden espacial, temporal, y mecánica (orientación en el espacio, distancia mínima, sucesión y duración, fuerza, aceleración y velocidad ...) así como conocimientos en acto que podrían tomar la forma de teoremas de geometría y de mecánica, si fueran explicitados. Esta explicitación es por otra parte uno de los compromisos del entrenamiento y del análisis del movimiento: viene favorecida por las técnicas del video y por la competencia profesional de los entrenadores; permanece sin embargo muy fragmentaria.

Las competencias matemáticas son también sostenidas por esquemas organizadores de la conducta. Tomemos algunos ejemplos elementales:

- el esquema del recuento de una colección pequeña por un niño de 5 años tiene que variar en sus formas cuando se trata de contar bombones, platos sobre una mesa, o personas sentadas de manera dispersa en un jardín; no implica menos una organización invariante, esencial para el funcionamiento del esquema: coordinación de los movimientos de los ojos y gestos del dedo y de la mano en relación a la posición de los objetos, enunciado coordinado de la serie numérica, cardinación del conjunto contado mediante un énfasis tónico o mediante la repetición de la última palabra-número pronunciada: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete ... siete!

- el esquema de resolución de las ecuaciones de la forma $ax+b = c$ consigue rápidamente un grado elevado de disponibilidad y de fiabilidad en los alumnos de secundaria, principiantes en álgebra, cuando a, b, y c tienen valores numéricos positivos y cuando $b<c$ (este no es el caso de hecho cuando algunos parámetros a, b, c y $c-b$ son negativos. La serie de escrituras

efectuadas por los alumnos muestra claramente una organización invariante, que reposa a la vez sobre hábitos aprendidos y sobre teoremas como los siguientes:
"se conserva la igualdad al restar b de los dos lados"
"se conserva la igualdad al dividir por a los dos lados"

El funcionamiento cognitivo del alumno comporta operaciones que se automatizan progresivamente (cambiar de signo cuando se cambia de miembro, aislar x en un lado de la igualdad) y de decisiones conscientes que permiten tener en cuenta valores particulares de las variables de la situación. La fiabilidad del esquema para el sujeto reposa en último extremo sobre el conocimiento que tiene, explícito o implícito, de las relaciones entre el algoritmo y las características del problema a resolver.

La automatización es evidentemente una de las manifestaciones más visibles del carácter invariante de la organización de la acción. Pero una serie de decisiones conscientes puede también constituir el objeto de una organización invariante para una clase de situaciones dadas. Por otra parte, la automatización no impide que el sujeto conserve el control de las condiciones bajo las cuales tal operación es apropiada o no. Tomemos, por ejemplo, el algoritmo de la adición en numeración decimal; su ejecución está fuertemente automatizada por la mayor parte de los niños al final de la escuela elemental. Por tanto los niños son capaces de generar una serie de acciones diferentes en función de las características de la situación: llevar o no, intercalar cero o no, decimal o no. De hecho todas nuestras conductas comportan una parte de automaticidad y una parte de decisión consciente.

Se ve también con estos ejemplos, que los algoritmos son esquemas, o también que los esquemas son objetos del mismo tipo lógico que los algoritmos: les falta eventualmente la efectividad, es decir, la propiedad de lograr el fin con seguridad en un número finito de pasos. Los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un esquema ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce bien a cambiar de esquema, bien a modificar este esquema. Con Piaget, se puede decir que los esquemas que están en el centro del proceso de adaptación de las estructuras cognitivas son: asimilación y acomodación.

Tomemos de nuevo el ejemplo del algoritmo de la adición de números enteros. Se le presenta frecuentemente como un conjunto de reglas:
- comenzar por la columna de las unidades, la situada más a la derecha;
- continuar por la columna de las decenas, después por las centenas, etc.
- calcular la suma de los números en cada columna. Si la suma de los números en una columna es inferior a diez, escribir esta suma sobre la línea total (línea de abajo). Si es igual o superior a diez, escribir solamente la cifra de las unidades de esta suma y retener la cifra de las decenas, que se lleva arriba de la columna situada inmediatamente a la izquierda, para sumarla a los otros números de esta última columna,
- y se continúa de la misma manera progresando de derecha a izquierda, hasta que se agoten las columnas.

Explicitar estas reglas es difícil y casi imposible para los niños, aunque son capaces de realizar la serie de operaciones. Siempre hay mucho de implícito en los esquemas.

Es necesario observar además que, sin la numeración de posición y la conceptualización que se le asocia (descomposición polinómica de los números), el esquema-algoritmo no puede funcionar: se ve bien en los alumnos que fracasn, que no saben componer entre sí las informaciones dadas en términos de decenas, centenas, millares. Un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita. Consideremos los errores de los alumnos en las operaciones de sustracción: se observa que los errores más frecuentes (omitir las cifras que se llevan) suponen una conceptualización insuficiente de la notación decimal. Ciertamente puede haber fallos en la ejecución automatizada de un esquema, pero no son estos fallos los que dan cuenta de los principales errores.

En el caso del recuento, se puede identificar fácilmente dos ideas matemáticas indispensables en el funcionamiento del esquema: el de la biyección y el de cardinal, sin los cuales no hay conducta de recuento posible. En efecto, es sobre estos dos puntos sobre los que se observan errores: algunos niños no llegan a "cardinar", es decir a interpretar la última palabra-número pronunciada como representando la medida de todo el conjunto; otros niños (eventualmente los mismos) omiten elementos, o cuentan dos veces el mismo elemento. De manera análoga, no hay álgebra verdaderamente operatoria sin el reconocimiento de los teoremas que se refieren a la conservación de la igualdad. Estos no son los únicos elementos cognitivos útiles pero son decisivos.

Se designa por la expresión "concepto-en-acto" y "teorema-en-acto" los conocimientos contenidos en los esquemas: se les puede designar también por la expresión más global de "invariantes operatorios".

Tal y como acabamos de definirlo, el concepto de esquema se aplica fácilmente a la primera categoría de situaciones que se han visto más arriba, aquellas para las cuales el sujeto dispone de las competencias necesarias, y menos a la segunda categoría puesto que el sujeto duda e intenta varias aproximaciones. Por tanto, la observación de los alumnos en situación de resolución de problemas, el análisis de sus dudas y de sus errores, muestra que las conductas en situación abierta son igualmente estructuradas por los esquemas. Estos son tomados del vasto repertorio de esquemas disponibles, y especialmente de los que están asociados a las clases de situaciones que parecen tener una semejanza con la situación tratada actualmente. Simplemente como la semejanza no es sino parcial y eventualmente ilusoria, los esquemas son solamente esbozados, y las tentativas se interrumpen antes de haber sido concluidas; varios esquemas se pueden evocar sucesivamente, e incluso simultáneamente en una situación nueva para el sujeto (o considerada por él como nueva). A título de ilustración, tomemos el caso de una situación en la cual un grupo de niños de quinto tienen que comparar el volumen de un objeto sólido lleno y el de un recipiente (situación nueva para ellos). El primer esquema movilizado fue el de la comparación de las alturas, como si se tratara de comparar la cantidad de zumo de naranja en dos vasos de la misma forma: esta acción de comparación de los niveles no da lugar a ninguna conclusión. El segundo esquema observado fue el de la inmersión (parcial) del objeto sólido en el recipiente: evidentemente como el recipiente estaba también lleno, el agua se desborda; la conclusión del alumno fue que el objeto sólido era mayor! Sólo como consecuencia de que otras acciones, más operativas, fueron emprendidas es cuando un procedimiento verdaderamente decidible permite dilucidar la cuestión. De esta manera varios esquemas, aparentemente menos pertinentes, habían sido evocados antes de que emergiera una solución.

Este ejemplo ilustra la idea de que el funcionamiento cognitivo de un sujeto o de un grupo de sujetos en situación reposa sobre el repertorio de esquemas disponibles, anteriormente formados, de cada uno de los sujetos considerados individualmente. Al mismo tiempo los niños descubren nuevos aspectos, y eventualmente nuevos esquemas, en situación. Como las conductas en situación se basan en el repertorio inicial de los esquemas disponibles, no se puede teorizar válidamente sobre el funcionamiento cognitivo sin tener en cuenta el desarrollo cognitivo. La teoría de los campos conceptuales se dirige a este problema crítico.

Existen numerosos ejemplos de esquemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. En cualquier caso un individuo puede aplicar un esquema a una clase más pequeña que la que se podría aplicar eficazmente. Se plantea entonces un problema de extensión del esquema a una clase más amplia: se puede hablar entonces de deslocalización, generalización, transferencia, descontextualización. No se puede imaginar que un proceso de este tipo interviene sin que sean reconocidas por el sujeto analogías y parentescos (semejanzas sobre ciertos criterios, diferencias sobre otros) entre la clase de situaciones sobre la cual el esquema era ya operatorio para el sujeto, y las situaciones nuevas a conquistar. El reconocimiento de invariantes es por tanto la clave de la generalización del esquema.

Pero un esquema puede también ser aplicado por un sujeto individual a una clase demasiado amplia: de este modo se pone en situación de fallo y el sujeto debe restringir el alcance, y descomponer el esquema en elementos distintos susceptibles de ser recompuesto de manera diferente para las diversas subclases de situaciones, eventualmente por adjunción de elementos cognitivos suplementarios. Se reconoce en esto procesos de restricción y de acomodación. Por ejemplo, si es necesario contar un conjunto de varios cientos de elementos, el esquema de recuento debe ser enriquecido mediante procedimientos de reagrupamientos, de recuentos parciales, de adiciones; o bien, en el ejemplo del álgebra, si los valores de a, b y c cumplen las condiciones vistas más arriba (c-b negativo, por ejemplo), la resolución de las ecuaciones del tipo ax+b=c va a requerir cambios importantes del esquema inicial.

En la resolución de problemas aritméticos llamados elementales, los niños encuentran numerosas dificultades conceptuales. En términos de esquemas es como se debe analizar la elección de buenas operaciones y buenos datos para resolver un problema en el cual existen varias posibilidades de elección. La toma de información en la lectura del enunciado, la toma de informaciones físicas (medidas por ejemplo), la búsqueda de informaciones en una documentación (en un libro escolar, en una tabla estadística, etc.), la combinación adecuada de estas informaciones por las operaciones de adición, de sustracción, de multiplicación y de división, obedecen en general a esquemas, especialmente en los niños que dominan estas situaciones. Para los otros alumnos, se trata de la resolución del problema, porque las situaciones en juego no han llegado todavía a ser triviales para ellos; pero los procedimientos heurísticos son esquemas: no son ni tan efectivos como los algoritmos, ni incluso son eficaces a veces.

El esquema, la totalidad dinámica organizadora de la acción del sujeto para una clase de situaciones específicas, es por tanto un concepto fundamental de la psicología cognitiva y de la didáctica. No se reconoce con frecuencia como tal. Además, requiere ser analizado. Si se reconoce fácilmente que un esquema está compuesto de reglas de acción y de anticipaciones puesto que genera una serie de acciones con el fin de lograr un cierto objetivo, no se reconoce siempre que está igualmente compuesto, de manera esencial, de invariantes operatorios (conceptos-en-acto y conocimientos-en-acto) y de inferencias. Las inferencias son indispensables para la puesta en funcionamiento del esquema en cada situación particular: en efecto, como hemos visto, un esquema no es un estereotipo sino una función temporalizada de argumentos, que permite generar series de diferentes acciones y de recogida de información en función de los valores de las variables de la situación. Un esquema es siempre un universal puesto que está asociado a una clase, y que además esta clase no es en general finita.

En cuanto a los invariantes operatorios, merecen una explicación complementaria puesto que existen fundamentalmente tres tipos lógicos.

- *invariantes del tipo "proposiciones"*: son susceptibles de ser verdaderos o falsos; los teorías-en-acto son invariantes de este tipo.

1er ejemplo: entre 5 y 7 años, los niños descubren que no es necesario contar el todo para encontrar el cardinal de $A \cup B$ si ya se ha contado A y B. Se puede expresar este conocimiento por un teorema-en-acto:

$$\text{Card}\ (A \cup B) = \text{Card}\ (A) + \text{Card}\ (B), \text{ siempre que } A \cap B = \emptyset.$$

La ausencia de cuantificador deja entender que este teorema no tiene una validez universal para los niños, sino un alcance solamente local, para pequeñas colecciones por ejemplo.

2º ejemplo: entre 8 y 10 años, con un éxito variable según los individuos, muchos alumnos comprenden

que si una cantidad de objetos comprados se multiplica por 2, 3, 4, 5, 10, 100 u otro número simple, entonces el precio es 2, 3, 4, 5, 19, 100 veces mayor. Se puede expresar este conocimiento por un teorema-en-acto,
$f(nx) = nf(x)$ para n entero y simple.

- *invariantes del tipo "función proposicional"*: no son susceptibles de ser verdaderos o falsos, pero constituyen las piezas indispensables para la construcción de proposiciones. Por ejemplo, los conceptos de cardinal y de colección, los de estado inicial, transformación y de relación cuantificada, son indispensables para la conceptualización de las estructuras aditivas. Estos invariantes no son proposiciones

Estos conceptos son raramente explicitados por los alumnos incluso aunque son construidos por ellos mismos en la acción: son los conceptos-en-acto, o las categorías-en-acto. El tipo lógico de los conceptos-en-acto es diferente del tipo lógico de los teoremas-en-acto: son funciones proposicionales. La relación entre funciones proposicionales y proposiciones es una relación dialéctica: no hay proposiciones sin funciones proposicionales y tampoco funciones proposicionales sin proposiciones. De la misma manera conceptos-en-acto y teoremas-en-acto se construyen en estrecha relación.

Entre las funciones proposicionales, es necesario considerar que existen funciones con un argumento (las propiedades), funciones con dos argumentos (las relaciones binarias), funciones con tres argumentos (las relaciones ternarias, entre las cuales se encuentran las leyes de composición binarias), funciones con cuatro argumentos, como la proporcionalidad, funciones con más de cuatro argumentos.

Se puede escribir como $P(x)$ la función proposicional "... es azul", R_2 (x, y) la relación "... está a la derecha de ...", R_3 (x, y, z) la relación ".. está entre .. y ..." o la ley de composición "la suma de ... y ... es ...".

Esta distinción entre proposiciones y funciones proposicionales es indispensable. Sin embargo, ella por sí sola no da cuenta de todos los aspectos importantes del proceso de conceptualización. Los conceptos de color, de dirección y de sentido tienen la evidencia de otro tipo lógico que los conceptos de azul y de recta. Se puede considerar, por ejemplo, que el conjunto de los colores es el conjunto cociente del conjunto de los objetos por la relación de equivalencia "tiene el mismo color". Es necesario por tanto considerar que el concepto de color procede de la construcción de un descriptor por la puesta en relación de valores particulares que puede tomar. ¿Es necesario un análisis todavía más complejo para los conceptos de calor, fuerza, función, variable? Aquí hay una vía de investigación teórica muy importante.

- *invariantes del tipo "argumento"*: quien dice función proposicional y proposición dice argumento. Los lógicos clásicos tenían la costumbre de tomar sus ejemplos entre los objetos ordinarios y sus propiedades. Había entonces argumentos a, b, c, (ejemplos de las variables x, y, z), objetos materiales como el libro, la mesa, el personaje Pablo; y funciones proposicionales, propiedades y relaciones P, R_2, R_3 como las que hemos visto antes. Por ejemplo, "Pablo pone el libro encima de la mesa" se puede escribir R_3 (Pablo, libro, mesa), proposición que resulta de la ejemplificación de los argumentos de la función proposicional R3 (x, y, z) "x pone y sobre z" en la cual, x es una persona, y un objeto material pequeño manipulable y z un soporte posible.

En matemáticas, los argumentos pueden ser objetos materiales (el barco está a la derecha del faro), personajes (Pablo es más alto que Céline), números (4+3=7), relaciones ("más grande que" es una relación antisimétrica), e incluso proposiciones ("8 es un divisor de 24" es la recíproca de "24 es un múltiplo de 8").

Estas distinciones son indispensables para la didáctica porque la transformación de los conceptos-útiles en conceptos-objetos es un proceso decisivo en la conceptualización de lo real. Esta transformación significa entre otras cosas que las funciones proposicionales pueden convertirse en argumentos. La nominalización es una operación lingüística esencial en esta transformación.

Este paréntesis sobre las proposiciones y las funciones proposicionales puede parecer paradójico en un apartado dedicado principalmente a los invariantes operatorios contenidos en un esquema. La primera razón de esta clarificación es que los invariantes operatorios no son de un tipo lógico único y que es necesario por tanto analizar la condición particular de cada uno de ellos. La segunda razón es que un concepto-en-acto no es de hecho un concepto, ni un teorema-en-acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Este no es necesariamente el caso para los invariantes operatorios. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización: sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esta parte visible no sería nada. Recíprocamente, no se sabe hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sino con la ayuda de las categorías del conocimiento explícitas: proposiciones, funciones proposicionales, objetos-argumentos.

En resumen, la operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones variadas, y el investigador debe analizar una gran variedad de conductas y de esquemas para comprender en qué consiste, desde el punto de vista cognitivo, tal o cual concepto: por ejemplo, el concepto de razón no se comprende sino a través de una diversidad de problemas prácticos y teóricos; igual ocurre con los conceptos de función o de número. Cada uno de estos conceptos comporta en efecto varias propiedades, cuya pertinencia es variable según las situaciones a tratar. Algunas se pueden comprender muy pronto, otras mucho más tarde en el transcurso del aprendizaje. Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de los esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones.

En cualquier caso la acción operatoria, no lo es todo en la conceptualización de lo real. No se debate la verdad o la falsedad de un enunciado totalmente implícito, y no se identifican los aspectos de lo real a los cuales es necesario prestar atención, sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. El uso de significantes explícitos es indispensable para la conceptualización.

Esto es lo que conduce a considerar que un concepto es una tripleta de tres conjuntos:

C (S, I, Γ)

S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia)

I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado)

Γ: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, es necesariamente considerar estos tres planos a la vez. No hay en general biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No se puede por tanto reducir el significado ni a los significantes, ni a las situaciones.

CAMPOS CONCEPTUALES

Consideremos en primer lugar un campo conceptual como un conjunto de situaciones. Por ejemplo, para el campo conceptual de las estructuras aditivas, el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones; y por las estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. La primera ventaja de esta aproximación mediante las situaciones es la de permitir generar una clasificación que reposa sobre el análisis de las tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas.

El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global.

Algunos investigadores privilegian, para este análisis, modelos de la complejidad que provienen bien de la lingüística, bien de las teorías del tratamiento de la información. La teoría de los campos conceptuales privilegia por el contrario los modelos que atribuyen un papel esencial a los propios conceptos matemáticos. Ciertamente que la forma de los enunciados y el número de elementos puestos en juego son factores pertinentes de la complejidad, pero su papel es subordinado.

La lógica no es un cuadro suficientemente operatorio para dar cuenta de la complejidad relativa de las tareas y subtareas, de los procedimientos, de las representaciones simbólicas. Es demasiado reductora y pone sobre el mismo plano los objetos matemáticos que, aunque teniendo eventualmente el mismo estatus lógico (predicado de primer orden, clase de funciones proposicionales de un cierto tipo, ley de composición ....) no plantean los mismos problemas de conceptualización. En relación a una psicología cognitiva centrada sobre las estructuras lógicas, como la de Piaget, la teoría de los campos conceptuales aparece más bien como una psicología de los conceptos, incluso aunque el término “estructura” intervenga en la designación del propio campo conceptual considerado: estructuras aditivas, estructuras multiplicativas. En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas.

El campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. De este modo son elementos constitutivos de las estructuras aditivas, los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumento o disminución (perder o gastar 5 francos), de relación de comparación cuantificada (tener 3 bombones o 3 años más), de composición binaria de medidas (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unaria, de inversión, de número natural y número relativo, de abscisa, desplazamiento orientado y cantidad ...

Estos conceptos no van solos: no tendrían casi alcance si a los teoremas verdaderos no se les da su función en el tratamiento de las situaciones:

$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$,siempre que $A \cap B = \emptyset$

$F = T\,(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$

para S = estado inicial, T = transformación, F = estado final.

$AC = AB + BC$ (Relación de Chasles) $\Rightarrow AB = AC - BC$, cualquiera que sea la posición respectiva de A, B, y C.

etc.

De manera análoga, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor, etc. Entre los teoremas que dan su función a estos conceptos, es necesario mencionar:

- las propiedades de isomorfismo de la función lineal
$f(nx) = nf(x)$
$f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1)+ n_2f(x_2)$
y su generalización a las relaciones no enteras.

las propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas
$f(x) = ax$, $x = 1/a\ f(x)$

y algunas propiedades específicas de la bilinealidad,
$f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1.n_2f(x_1,x_2)$

Hay otros teoremas relativos a las estructuras multiplicativas, y la elaboración pragmática de este campo conceptual pasa también por etapas que es posible identificar claramente.

Pero el alcance de este cuadro teórico de los campos conceptuales permanecería limitado si se detiene en estos dos ejemplos; mencionaré otros varios dominios para mostrar que se trata de un cuadro relativamente general:

- La electricidad, y los esquemas que organizan la actividad del sujeto en este dominio. Las situaciones a comprender y a tratar son diferentes: la iluminación de una habitación, la conexión de una lámpara a una pila (dos polos, dos hilos, existencia de una corriente), la comprensión del circuito eléctrico de una habitación, o de un coche, el análisis y la disociación de los conceptos de intensidad, tensión, resistencia y energía para los cálculos de electrocinética, etc.;
-la mecánica, que implica igualmente una gran variedad de situaciones y de conceptos;
- las magnitudes espaciales (longitudes, superficies, volúmenes), cuya conceptualización requiere a la vez la geometría, las estructuras aditivas y las multiplicativas;
- la lógica de clases, que constituye el saber de referencia para la comprensión de los conceptos de propiedad y de característica, de la relación de inclusión, de operaciones de intersección, unión, complementario sobre las clases y las operaciones de conjunción, disyunción y de negación sobre las propiedades. Se puede deplorar que los psicólogos hayan concedido una atención excesiva a los problemas de clasificación y de categorización, o que los reformadores del movimiento de las “matemáticas modernas” hayan caído como neófitos en la religión de la lógica de clases; pero es necesario reconocer también que este campo conceptual recubre cuestiones serias para el desarrollo y el aprendizaje de la racionalidad. La lógica de clases presenta por otra parte interés no solamente por el cálculo de clases y propiedades, sino también por las relaciones entre operaciones sobre las clases y operaciones sobre los números. Al lado de las leyes de Morgan, puramente lógicas:

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{X} = \text{complementario de } X$$

Se puede en efecto considerar los teoremas que se refieren a la correspondencia entre clases y cardinales, por ejemplo la cuantificación de la inclusión:

$A \subset B \Rightarrow \mathrm{Card}\ (A) \leq \mathrm{Card}\ (B)$

o también el teorema de los cardinales:

Card (A $\cup$ B) + Card (A $\cap$ B) = Card (A) + Card (B)

Este último teorema no es trivial. Por tanto algunos alumnos de CM2 son capaces de calcular Card (A$\cup$B) conociendo los otros tres cardinales; o Card (A), o aún Card(A$\cap$B); esta última tarea es la más dificil de las tres. Se encuentra para la lógica de clases la cuestión ya planteada más arriba de los conocimientos no explícitos susceptibles de orientar un procedimiento de resolución. Los esquemas necesarios para la resolución de los últimos problemas que acabamos de evocar participan a la vez de la lógica de clases y de las estructuras aditivas.

SITUACIONES

El concepto de situación ha sido muy renovado por Guy Brousseau, quien le ha dado no solamente un alcance didáctico que no tenía en psicología, sino también una significación en la cual la dimensión afectiva y dramática interviene tanto como la dimensión cognitiva. La puesta en escena de los conceptos y los procedimientos matemáticos es un arte que se alimenta tanto de la psicología social como de la epistemología y la psicología de las matemáticas.

Nosotros no tomamos aquí el concepto de “situación” con toda esta significación; nos limitaremos al sentido que le da habitualmente el psicólogo: los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las cuales son confrontados. Retendremos dos ideas principales:

1) la de variedad: existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual dado, y las variables de situación son un medio de generar de manera sistemática el conjunto de las clases posibles;

2) la de la historia: los conocimientos de los alumnos son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente, especialmente por las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar.

La combinación de estas dos ideas no hace necesariamente fácil el trabajo del investigador en didáctica, ya que la primera idea orienta hacia el análisis, la descomposición en elementos simples y la combinatoria de los posibles, mientras que la segunda le orienta hacia la búsqueda de situaciones funcionales, casi siempre compuestas de varias relaciones, y cuya importancia relativa está muy ligada a la frecuencia con la que se les encuentra.

Consideremos algunos ejemplos: comprar pasteles, frutas o bombones, poner la mesa, contar las personas, los cubiertos, jugar a las canicas, son para un niño de 6 años, actividades favorables al desarrollo de conceptualizaciones matemáticas concernientes al número, la comparación, la adición y la sustracción. Sin embargo, en la mayor parte de estas actividades, la vida no ofrece sino un pequeño número de casos entre los problemas posibles; por ejemplo, sobre la actividad de comprar:

- ¿Tengo suficiente dinero para comprar esto? ¿Para comprar a la vez esto y aquello?
- ¿Cuánto me queda si compro esto?
- ¿Cuánto me falta?
- ¿Es preferible comprar esto o aquello? ¿Cuál es la diferencia de precio?

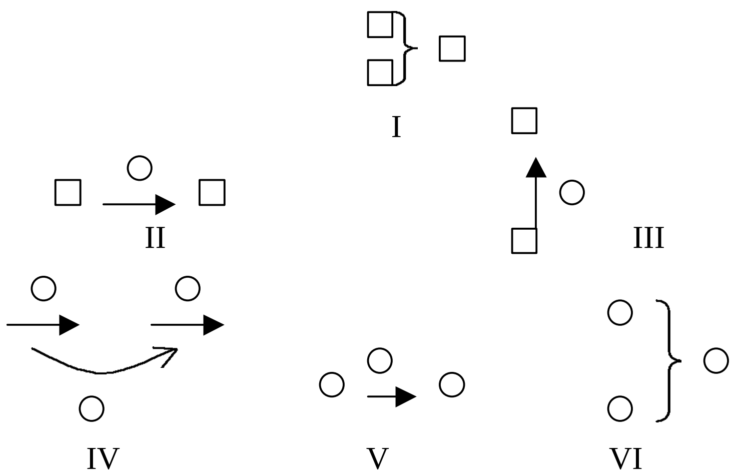
Además, en las situaciones habituales de la vida, los datos pertinentes están inmersos en un conjunto de informaciones poco o nada pertinentes, sin que siempre sean expresadas claramente las cuestiones que se pueden plantear. De tal manera que el tratamiento de estas situaciones supone a la vez la identificación de las cuestiones y la de las operaciones que hay que hacer para responderlas. Esto invita al análisis, pero no es fácil partir de las situaciones de la vida para establecer una clasificación sistemática.

En principio por tanto, toda situación puede ser reducida a una combinación de relaciones de base con datos conocidos y desconocidos, los cuales corresponden a otras tantas cuestiones posibles. La clasificación de estas relaciones de base y de las clases de problemas que se pueden generar a partir de ellas es un trabajo científico indispensable. Ninguna ciencia se constituye sin un trabajo de clasificación sistemático. Esta clasificación permite además abrir el campo de las posibilidades, y superar el cuadro demasiado limitado de las situaciones habituales de la vida.

Tomemos el ejemplo de las estructuras aditivas, se pueden identificar seis relaciones de base, a partir de las cuales es posible engendrar todos los problemas de adición y sustracción de la aritmética ordinaria (Vergnaud, 1981).

RELACIONES ADITIVAS DE BASE

I. La composición de dos medidas en una tercera
II. La transformación (cuantificada) de una medida inicial en una medida final
III. La relación (cuantificada) de comparación entre dos medidas
IV. La composición de dos transformaciones
V. La transformación de una relación
VI. La composición de dos relaciones



□ Medida
○ Transformación o relación (positiva o negativa)

Esta clasificación no ha salido perfectamente armada del cerebro de un matemático. Resulta de consideraciones psicológicas y matemáticas:
- dificultad muy desigual de problemas de estructuras diferentes que se resuelven sin embargo con la misma operación numérica;
- desfase ontogenético en el éxito de las diferentes clases de problemas que se pueden engendrar a partir de una misma relación; desfase ontogenético de los procedimientos utilizados, así como de las simbolizaciones matemáticas accesibles a los niños;
- importancia de los conceptos de transformación temporal y de relación en el proceso de apropiación de las situaciones de adición y de sustracción. La toma en consideración de estos conceptos tiene grandes consecuencias teóricas: conduce de una parte a introducir, al lado del modelo de la ley binaria interna, el de la operación unaria externa, de otra parte a recurrir a los números relativos para caracterizar ciertas operaciones de pensamiento de los niños.

No es este el lugar de recordar las diferentes clases de problemas que permiten engendrar estas relaciones de base, así como que cada una de las clases de problemas definidas puede ser a su vez subdividida en subclases, en función de los valores numéricos utilizados y del dominio de experiencia al cual se hace referencia: a los 8 años se trataría de la misma manera la transformación de una cantidad de bolas, de una suma de dinero, de una masa, un volumen o de una posición.

No es superfluo, por el contrario, resaltar que el análisis de las estructuras multiplicativas es profundamente diferente de las estructuras aditivas. Las relaciones de base más simples no son ternarias sino cuaternarias, porque los problemas más simples de multiplicación y de división implican la proporción simple de dos variables una en relación a la otra.

$$\begin{array}{c|c} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$$

Esta relación permite en efecto generar cuatro clases de problemas elementales:

$$\begin{array}{c|c} 1 & a \\ b & \square \end{array}$$

la multiplicación

$$\begin{array}{c|c} 1 & \square \\ b & c \end{array}$$

la división-partición

$$\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \square & c \end{array}$$

la división cuotición

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ c & \square \end{array}$$

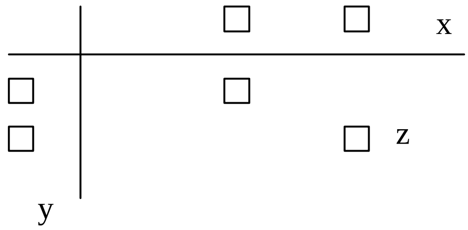
la cuarta proporcional

Estos problemas presentan dificultades muy distintas según los valores numéricos (dificultad de la multiplicación y de la división por un decimal, sobre todo por un decimal más pequeño que 1), y según el dominio de experiencia al cual se hace referencia (no se hace funcionar el modelo de la proporcionalidad sobre la homotecia y sobre la masa, como se le hace funcionar sobre el precio de objetos familiares o sobre el reparto igualitario de bombones entre los niños).

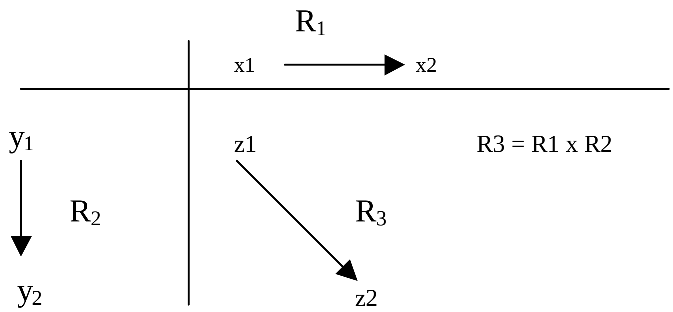
En segundo lugar, la combinación de dos proporciones no plantea los mismos problemas cognitivos si la combinación se hace por encadenamiento de funciones que ligan las variables dos a dos: x proporcional a y, y proporcional a z

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & z \\ \square & \square & \\ \square & \square & \square \\ & \square & \square \end{array}$$

o si se hace por producto: z proporcional a x, y a y; x y e independientes entre sí. Se trata en este caso de una estructura de proporción doble.



No se subrayará nunca lo suficiente la extrema importancia epistemológica de la proporción doble (y múltiple) para la geometría, la física, las probabilidades y la estadística: muchas cuestiones serían mejor enseñadas y su consideración sería mejor reconocida. Ahora bien los alumnos no comprenden de ella sino débilmente los pormenores: de un lado porque son conceptualmente más difíciles, y de otro porque ponen en juego numerosos elementos a la vez: seis magnitudes y tres razones para la proporción doble, sin contar las funciones y las razones intermedias previsibles.



Como estas magnitudes y estas razones pueden ser números enteros simples, enteros cualquiera, fracciones, decimales mayores o menores que la unidad, existe una diversidad extraordinaria de casos de figuras, cuya dificultad para los alumnos es muy variable. Esta diversidad de casos puede sin embargo ser bastante fácilmente jerarquizada considerando los tres grandes factores de la complejidad cognitiva: la estructura de problemas, los valores numéricos, y los dominios de experiencia.

Son muy variables igualmente los procedimientos utilizados por los alumnos: más de veinte categorías de tentativas, éxitos o fracasos, para la búsqueda de la cuarta proporcional, por ejemplo.

Finalmente hay que resaltar que los conceptos de fracción, de cociente, de número racional, de producto y de cociente de dimensiones, de escalares, de función lineal y n-lineal, de combinación y de aplicación lineal, toman primitivamente su sentido en los problemas de proporción, y se desarrollan como útiles de pensamiento a través del dominio progresivo de estas situaciones, bastante antes de poder ser introducidos y tratados como objetos matemáticos.

La clasificación de las situaciones resulta a la vez de consideraciones matemáticas y de consideraciones psicológicas. Algunas distinciones no son interesantes sino porque implican diferencias significativas en la manera en la que los alumnos se disponen a tratar las situaciones diferenciadas de esa manera; los propios matemáticos no las tienen en cuenta, y si lo hacen se atienen a las matemáticas constituidas, despreciando distinciones que son importantes para la didáctica. Por tanto, una clasificación que no tuviera sentido matemático no sería aceptable. Una de las apuestas que debe tener el psicólogo que se interese por el aprendizaje de las matemáticas es establecer clasificaciones, describir procedimientos, formular teoremas-en-acto, analizar la estructura y la función de los enunciados y representaciones simbólicas, en términos que tengan un sentido matemático. La especificidad de los aprendizajes matemáticos está en las mismas matemáticas. Esto no significa que la teoría del aprendizaje de las matemáticas esté completamente contenida en las matemáticas.

Entre los campos conceptuales evocados más arriba, las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas tienen un lugar un poco privilegiado en la actualidad, porque la clasificación de las relaciones elementales y de las clases de problemas elementales son en ellas relativamente avanzadas y reconocidas en la comunidad de los investigadores. Pero no se ha llegado a ese nivel de desarrollo para la lógica de las clases, la geometría, o el álgebra elemental. Existen sin embargo criterios que deberían permitir avanzar rápidamente.

Antes de pasar a la última parte de este texto, no es superfluo clarificar lo mejor posible las relaciones que mantiene esta visión de las situaciones con la teoría de las situaciones didácticas tal como es tomada en la comunidad francesa, a partir de los trabajos de Guy Brousseau.

Una situación didáctica es en primer lugar una puesta en escena interesante y rica. Las relaciones elementales distinguidas aquí y las clases de problemas que permiten engendrar no presentan, tal cual, sino un interés didáctico moderado, justamente porque son demasiado elementales. Son en primer lugar instrumentos para el análisis de las situaciones y para el análisis de las dificultades conceptuales encontradas por los alumnos. Toda situación compleja es una combinación de relaciones elementales, y no se puede soslayar el análisis de las tareas cognitivas que estas relaciones permiten generar; pero la organización de una situación didáctica en un proyecto colectivo de investigación para la clase supone la consideración a la vez de las funciones epistemológicas de un concepto, de la significación social de los dominios de experiencia a los cuales hace referencia, los juegos de papeles (roles) entre los actores de la situación didáctica, resortes del juego, del contrato y de la transposición. La tesis subyacente a la teoría de los campos conceptuales, sin embargo, es que una buena puesta en escena didáctica se apoya necesariamente sobre el conocimiento de la dificultad relativa de las tareas cognitivas, de los obstáculos que habitualmente se encuentran, del repertorio de procedimientos disponibles, y de las representaciones posibles. La psicología cognitiva es esencial.

Al lado de la idea de diversidad, he subrayado igualmente la idea de historia como una idea esencial de mi propósito. No se trata de la historia de las matemáticas sino de la historia del aprendizaje de las matemáticas. Esta historia es individual. Por tanto se pueden identificar regularidades impresionantes de un niño a otro, en la manera que abordan y tratan una misma situación, en las concepciones primitivas que se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las cuales pasan. Estas etapas no son totalmente ordenadas; no obedecen a un calendario estrecho; las regularidades se refieren a las distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Pero el conjunto forma sin embargo un todo coherente para un campo conceptual dado; se pueden especialmente identificar las principales filiaciones y las principales rupturas, lo que constituye la justificación principal de la teoría de los campos conceptuales.

SIGNIFICADOS Y SIGNIFICANTES

Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones mismas. No está tampoco en las palabras y los símbolos matemáticos. Sin embargo se dice que una representación simbólica, que una palabra o que un enunciado matemático tiene sentido, o varios sentidos, o ningún sentido para tales o cuales individuos; se dice también que una situación tiene sentido o no lo tiene. Entonces, ¿qué es el sentido?

El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en obra para tratar las situaciones a las cuales el sujeto llega a estar confrontado, y que implican la idea de adición; es también el conjunto de esquemas que puede poner en juego para operar sobre los símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representa la adición.

Una situación dada o un simbolismo particular no evocan en un individuo todos los esquemas disponibles. El sentido de una situación particular de adición no es por tanto el sentido de la adición; el sentido de un símbolo particular tampoco. Cuando se dice que una tal palabra tiene tal sentido, se reenvía de hecho a un subconjunto de esquemas, operando de este modo una restricción en el conjunto de los esquemas posibles.

Se plantea sin embargo la cuestión de la función de los significantes en el pensamiento, y de la naturaleza de los esquemas que organizan el tratamiento de los significantes, en su comprensión y en su producción. ¿Qué funciones cognitivas es necesario atribuir al lenguaje, y las representaciones simbólicas, en la actividad matemática?

Se considera con certeza que las matemáticas forman un cuerpo de conocimientos que responden a problemas prácticos y teóricos que se ha planteado la humanidad en el curso de su historia; pero no se responde de este modo sino parcialmente a la cuestión "¿qué son las matemáticas?" Puesto que los significantes y la organización del discurso juegan en ello un papel esencial. Existe por tanto un trabajo teórico y empírico indispensable para clarificar la función del lenguaje y de los restantes significantes. En la teoría de los campos conceptuales, esta función es triple:

- ayuda a la designación y por tanto a la identificación de los invariantes: objetos, propiedades, relaciones, teoremas;
- ayuda en el razonamiento y la inferencia;
- ayuda a la anticipación de los efectos y de los fines, a la planificación, y al control de la acción.

Un esquema es, como hemos visto, una totalidad organizada, que permite de generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Esto es posible porque el esquema comporta:

- invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
- anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
- reglas de acción del tipo si ... entonces ... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
- inferencias (o razonamientos) que permiten "calcular" las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Es clásico decir que el lenguaje tiene una doble función de comunicación y de representación. Pero se puede de este modo subestimar su función como ayuda del pensamiento, que no está particularmente cubierta por las funciones de representación y de comunicación. Ciertamente que la designación y la identificación de los invariantes responde bien de la función de representación; pero no es seguro que el acompañamiento por el lenguaje de una actividad manual o de un razonamiento provenga solamente de la función de representación.

En efecto, no es en cualesquiera circunstancias que un individuo acompaña su acción de una actividad lingüística, sino más bien cuando tiene necesidad de planificar y de controlar una serie de acciones insuficientemente dominadas. Una actividad automatizada no se acompaña apenas con palabras, incluso en voz baja: los niños que, con 9 años, dominan perfectamente cómo se calcula un estado inicial conociendo el estado final y la transformación, no hablan apenas. Aquellos para los que esto es todavía un problema son mucho más prolijos (Morange, tesis en curso). Se puede evocar todavía el ejemplo del aprendizaje de las maniobras de conducción de un coche: un principiante verbaliza voluntariamente lo que hace o lo que va a hacer; algunas semanas más tarde no tiene necesidad de ello. La actividad lingüística favorece evidentemente la realización de la tarea y la resolución del problema encontrado; sin el cual no intervendrían. Todo ocurre como si la actividad lingüística favoreciera el descubrimiento de las relaciones pertinentes, la organización temporal de la acción y su control. Se llega de este modo a la función de representación del lenguaje, pero esta función es triple:

- representación de los elementos pertinentes de la situación;
- representación de la acción,
- representación de las relaciones entre la acción y la situación.

El lenguaje representa diferentes órdenes de cosas, y la actividad lingüística tiene varias funciones.

Centremos nuestra atención sobre las informaciones pertinentes y las operaciones de pensamiento, puesto que ellas forman el armazón de la actividad intelectual:

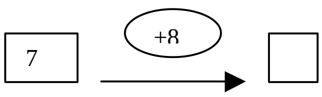
- las informaciones pertinentes se expresan en términos de objetos (argumentos), de propiedades y de relaciones (funciones proposicionales), de teoremas (proposiciones).
- las operaciones de pensamiento en términos de selección de informaciones, inferencias, de aceptación o de rechazo de consecuencias, y también en términos de previsión de las operaciones a realizar, de resultados o fines a lograr, de descomposición en etapas del proceso de tratamiento: “hago esto, y después aquello, entonces tendré esto, etc.”

La actividad lingüística expresa también otros aspectos importantes, como la implicación del sujeto en la tarea o en el juicio emitido, sus sentimientos, su estimación de la plausibilidad de una hipótesis o de una conclusión, o todavía la relación de estos elementos entre sí. No abordaré aquí sino el problema de la expresión y de la simbolización de los conceptos, de los teoremas, y de los objetos, analizando con un cierto detalle el ejemplo de la investigación de un estado inicial cuando la transformación es negativa.

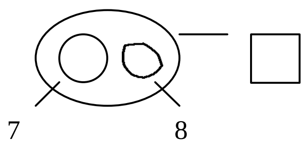
“Mélanie acaba de comprar un pastel en la pastelería. Ha pagado 8 francos. Cuenta lo que le queda en su monedero y encuentra 7 francos. Se pregunta, si no ha perdido dinero, ¿cuánto dinero tenía antes de comprar el pastel?

Consideremos en primer lugar algunas escrituras y diagramas posibles:

a) $7 + 8 = \square$

b) 

c) $8 + 7 = \square$

d) 

Todas estas formas son aceptables, incluso aunque se observan de manera desigual. Al mismo tiempo son poco útiles porque representan la solución del problema y no el problema: la elección de la operación de adición es necesariamente efectuada antes que la ecuación o el diagrama se escriba, incluso si el resultado de la operación numérica no se calcula todavía. El interés de estas escrituras no puede residir sino en las contribuciones que aportan eventualmente en la objetivación de la relación que aportan eventualmente en la objetivación de la relación entre la solución y los datos numéricos, no en la relación entre la resolución y el problema.

Si se trata de representar el problema, no tenemos apenas la elección entre dos simbolizaciones:

e) $\square - 8 = 7$

f) $\square \xrightarrow{-8} \boxed{7}$

No existe en efecto la posibilidad de representar el problema con los diagramas utilizados en d): no permiten simbolizar sino cantidades positivas, no transformaciones negativas.

Si finalmente se tiene el propósito de representar el paso de la representación del problema a la representación de la solución, entonces la simbolización d) conduce bien a hacer álgebra

__ - 8 = 7
__ - 8 +8 = 7 + 8
__ = 7+8

bien a adivinar el valor del cuadrado en __ - 8 = 7. Este juego de adivinanza no es apenas deseable, en todo caso no es generalizable a números más grandes: __ - 155 = 87.

Como no se puede apenas tratar de enseñar a los niños de 7 años el camino algebraico que permita pasar del problema __ - 8 = 7 a la solución __ = 7+8, es necesario, bien abandonar toda idea de representación simbólica de esta secuenciación, bien adherirse a la única representación accesible a esta edad

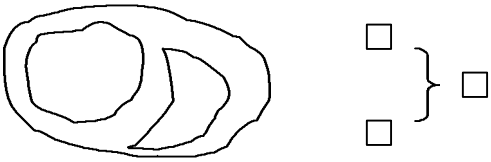
$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "-8"] & \boxed{7} \arrow[l, bend left, dotted, "+8"] \end{tikzcd}$$

poniendo entonces en evidencia la reciprocidad de la adición y de la sustracción como operaciones unarias.

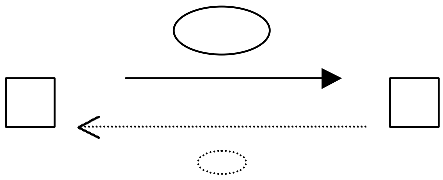
Abandonar la ambición de representar simbólicamente las transformaciones y las relaciones negativas, conduciría inevitablemente, si el enseñante y los manuales continúan utilizando representaciones simbólicas para los otros objetos matemáticos, a excluir de la enseñanza las situaciones que ponen en juego transformaciones y relaciones negativas, especialmente cuando hay varias transformaciones sucesivas: varias compras, varias partidas de canicas, varias entradas y salidas de un almacén, etc. Ahora bien, las representaciones simbólicas tienen justamente la ventaja de aportar una ayuda a la resolución de problemas cuando los datos son bastante numerosos y cuando la respuesta a la cuestión planteada requiere varias etapas. Excluir las transformaciones y las relaciones negativas conduciría a un empobrecimiento deplorable en la enseñanza de las matemáticas.

Además las representaciones simbólicas no tienen sino una función de ayuda en la resolución de problemas complejos; son también medios de identificar más claramente los objetos matemáticos decisivos para la conceptualización. En el caso de las estructuras aditivas:

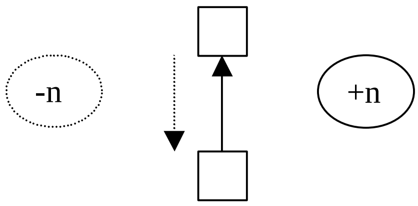
- las relaciones parte- parte –todo;



- las relaciones estado inicial - transformación - estado final y la reciprocidad de las operaciones de adición y sustracción;



- las relaciones referido- relación de comparación- referente y la reciprocidad de las relaciones cuantificadas "n de más que" y "n de menos que";



- la distinción entre las medidas (nunca negativas) representadas por cuadrados, y las transformaciones o relaciones (positivas o negativas) representadas por los redondeles, y en el interior de los cuales el número está siempre precedido de un signo positivo o negativo.

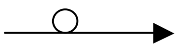
Si el profesor y el alumno no dispone de estos símbolos, son conducidos a recurrir a formas variadas del lenguaje natural: verbos para las transformaciones (ganar, perder, consumir), formas comparativas para las relaciones (tener n... de más que), formas atributivas para los estados y las medidas (tener n bombones, medir x metros), conjugadas en los tiempos de imperfecto, presente, o futuro; pueden utilizar también adverbios (ahora, después, antes), etc.

Todo este instrumental lingüístico es excelente para transmitir información, tanto en la expresión de la solución o en las verbalizaciones que acompañan al razonamiento, como en el enunciado del problema mismo. Pero tales formas lingüísticas se analizan como herramientas de pensamiento, no como objetos de pensamiento. Si la conceptualización matemática no se limita a la comprensión de las relaciones y las propiedades como útiles, sino que recubre también la transformación de estos útiles en objetos de pensamiento (Douady, 1986), entonces no se puede permanecer indiferentes a los medios de los que dispone el profesor y el alumno para esta transformación. En el aprendizaje de la racionalidad científica, lo metacognitivo forma parte de lo cognitivo.

Se puede hablar de un estado inicial de varias maneras:

- utilizando el imperfecto y una proposición subordinada: "¿Cuánto tenía Mélani antes de comprar el pastel?;
- designando este estado mediante un pronombre, un complemento y un adverbio: "lo que tenía antes";
- hablando expresamente del "estado inicial", o aún del "punto de partida", etc.

Existe por tanto en el lenguaje natural medios de transformar los conceptos-herramientas en conceptos-objetos, especialmente la nominalización. Sin embargo el simbolismo de los diagramas con cuadrados, redondeles, fechas y llaves es particularmente eficaz para esta transformación de las categorías del pensamiento en objetos de pensamiento. Para la expresión de las transformaciones, no es conceptualmente equivalente utilizar el verbo "ha pagado" en el pasado, de hablar del "gasto" (nominalización), o de designar toda transformación mediante un signo único



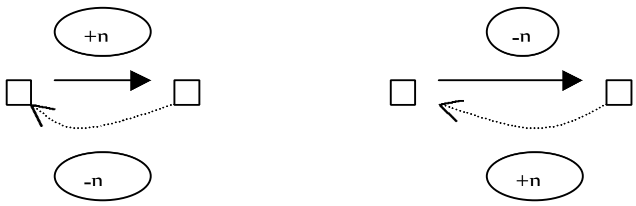
La invarianza del significante contribuye a la mejor identificación del significado y a su transformación en objeto de pensamiento.

Igualmente es posible representar el mismo teorema de varias maneras, por ejemplo:

a) el estado inicial, es el estado final al que se añade lo que se ha gastado o perdido, y por tanto se resta lo que se ha recibido o ganado;

b) $F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$

c)



Se ve fácilmente que estas formas no son equivalentes para los alumnos: la segunda forma está fuera del alcance de los alumnos del curso elemental: la primera no tiene el laconismo y la economía de la tercera. La pertinencia del simbolismo y del lenguaje es relativa a los conocimientos y al desarrollo cognitivo del alumno.

Tomemos un último ejemplo en las estructuras multiplicativas con la fórmula del volumen del prisma recto; el volumen es el producto del área de la base por la altura: $V = AH$. E interesémonos por una de las lecturas posibles de esta fórmula: "el volumen es proporcional al área de la base cuando la altura es constante, y a la altura cuando el área de la base es constante".

Se sabe que esta lectura bilineal se hace raramente en los manuales, aunque sea conceptualmente esencial: $V(A.1, H.1) = AH\ V(1,1)$; el volumen del prisma que tiene un área de la base A veces más grande que la unidad de área, y una altura H veces más grande que la unidad de longitud, tiene un volumen AH veces más grande que la unidad de volumen construida canónicamente como el producto de la unidad de área por la unidad de longitud.

Como este volumen $A(1,1)$ es igual a 1, se deduce de ello que $V(A,H) = A.H.$

Este razonamiento se apoya completamente en la dependencia lineal del volumen respecto de cada una de las variables área de la base y altura, independientes entre sí.

En la tabla de doble proporcionalidad, que incluimos a continuación, se puede leer fácilmente que el volumen es proporcional al área de la base cuando la altura se mantiene constante

	Área de la base				
	1	6	10	12	
1					
Altura 2					Volumen
4					
6	6	36	60	72	

o que el volumen es proporcional a la altura cuando el área de la base se mantiene constante:

	Área de la base				
	1	6	10	12	
1		6			
Altura 2		12			Volumen
4		24			
6		36			

Es claro que una tal lectura no está al alcance de los alumnos de quinto si no disponen sino de la fórmula V= A.H.

Se podría proporcionar otros ejemplos. Me contentaré para terminar con formular la tesis siguiente: el simbolismo matemático no es rigurosamente hablando ni una condición necesaria ni una condición suficiente para la conceptualización; pero contribuye útilmente a esta conceptualización, especialmente para la transformación de las categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos. El lenguaje natural es el medio esencial de representación y de identificación de las categorías matemáticas, pero no posee, tanto como los diagramas, las fórmulas y las ecuaciones, el laconismo indispensable para la selección y el tratamiento de las informaciones y las relaciones pertinentes.

Esta importancia atribuida al simbolismo no impide que, en última instancia, sea la acción del sujeto en situación lo que constituye la fuente y el criterio de la conceptualización.

CONCLUSIÓN

La teoría de los campos conceptuales reposa sobre un principio de elaboración pragmática de los conocimientos. No se puede teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas ni a partir sólo del simbolismo, ni a partir sólo de las situaciones. Es necesario considerar el sentido de las situaciones y de los símbolos. La clave está en considerar la acción del sujeto en situación, y la organización de su conducta. De aquí la importancia atribuida al concepto de esquema.

Totalidad dinámica y funcional, el esquema no reclama por ello menos análisis. Si organiza la conducta del sujeto comporta reglas de acción y anticipaciones. Pero esto no es posible sino porque forma parte integrante del esquema una representación implícita o explícita de lo real analizable en términos de objetos, de categorías-en-acto (propiedades y relaciones) y de teoremas-en-acto. Estos invariantes operatorios organizan la búsqueda de información pertinente en función del problema a resolver o del fin a lograr, y dirigen las inferencias.

El funcionamiento cognitivo del sujeto en situación depende del estado de sus conocimientos, implícitos o explícitos. Es necesario por tanto conceder una gran atención al desarrollo cognitivo, a sus continuidades, a sus rupturas, a los pasos obligados, a la complejidad relativa de las clases de problemas, procedimientos, representaciones simbólicas, al análisis de los principales errores y de los principales descubrimientos.

Es fecundo y legítimo investigar los parentescos y las rupturas en el interior del conjunto de situaciones organizadas por ideas también semejantes, en las cuales los procedimientos, las representaciones y las formulaciones pueden razonablemente derivar unas de otras. Un concepto no toma su significación en una sola clase de situaciones, y una situación no se analiza con la ayuda de un solo concepto. Es necesario por tanto proponerse como objetos de investigación conjuntos relativamente grandes de situaciones y de conceptos, clasificando los tipos de relaciones, las clases de problemas, los esquemas de tratamiento, las representaciones lingüísticas y simbólicas, y los conceptos matemáticos que organizan este conjunto. Las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas constituyen en este momento los dos principales ejemplos de campos conceptuales, estudiados con un cierto detalle, pero las ciencias ofrecen numerosos ejemplos distintos.

El homomorfismo entre lo real y la representación no debe ser buscado en primer lugar al nivel de los simbolismos, sino al nivel de los invariantes operatorios contenidos en los esquemas. Es ahí donde se sitúa la base principal de la conceptualización de lo real. De hecho no se insistirá nunca lo suficiente sobre la necesidad de poner en escena en las situaciones didácticas significativas los conceptos que se quieren enseñar; y sobre la necesidad para esto de analizar las tareas cognitivas encontradas por el sujeto. No se puede evitar la clasificación de las relaciones, los problemas y las operaciones de pensamiento necesarias para su solución.

Los esquemas organizan la conducta del sujeto para una clase de situaciones dada, pero organizan a la vez su acción y la actividad de representación simbólica, especialmente lingüística, que acompaña a esta acción. Un niño de 5 años enumera contando en voz alta; un alumno de 12 años trata una ecuación algebraica escribiéndola en su hoja y murmurando; de una manera general, el tratamiento de una situación nueva se acompaña de una actividad lingüística y simbólica. Esta actividad es eventualmente interiorizada; cada vez es más importante y manifiesta a medida que la situación es más nueva y el tratamiento menos automatizado; la resolución de problemas muy nuevos es imposible sin el lenguaje, especialmente cuando esta resolución requiere conceptualizaciones nuevas y la transformación de ciertos elementos en objetos de pensamiento bien identificados.

El lenguaje tiene en primer lugar una función de comunicación, y el aprendizaje de las matemáticas es un aprendizaje muy fuertemente socializado. Pero esta función de comunicación no se puede ejercer de manera útil sino apoyándose sobre esta otra función del lenguaje que es su función de representación. En relación con estas dos funciones, se observa otra función del lenguaje: la ayuda al pensamiento y a la organización de la acción. Esta función se apoya ella misma sobre la función de representación, pero lo que se representa entonces son a la vez los elementos de la situación considerada, la acción, y sus relaciones. El lenguaje y los símbolos matemáticos juegan por tanto un papel en la conceptualización y la acción. Sin los esquemas y las situaciones, quedarían vacíos de sentido.

BIBLIOGRAFÍA

BROUSSEAU, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7/2, pp. 33-115.

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5-31.

PIAGET, J. (1967).*Biologie et Connaissance*, Paris, Gallimard (notamment le chapitre V sur l'épistémologie des niveaux élémentaires de comportements).

VERNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.

VYGOTSKI (1986) *Langage et Pensée*. Paris, Editions Sociales Messidor.

Traducción: Juan D. Godino